

Určitý integrál

Cauchyho – Riemannova definícia určitého integrálu

Motivácia

$$P_1 = f(\chi_i) \Delta x_i$$

$$P = \sum_{i=1}^n f(\chi_i) \Delta x_i$$

Nech je interval $\langle a, b \rangle$ časťou definičného oboru funkcie f . Ak je daných $m+1$ čísel x_0, x_1, \dots, x_m takých, že platí:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

hovoríme, že je dané delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ na m čiastkových intervalov $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{m-1}, x_m \rangle$.

Označujeme $D = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$

Dĺžku čiastkového intervalu označíme: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ Iste platí: $\sum_{i=1}^m \Delta x_i = b - a$.

V každom čiastkovom intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, m$ zvolíme ľubovoľné číslo η_i

Číslo $S_f(D) = f(\eta_1)\Delta x_1 + f(\eta_2)\Delta x_2 + \dots + f(\eta_m)\Delta x_m = \sum_{i=1}^m f(\eta_i)\Delta x_i$ nazývame

integrálnym súčtom funkcie f pre delenie D intervalu $\langle a, b \rangle$ a pre danú voľbu čísel $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$.

Pre dané delenie D intervalu $\langle a, b \rangle$ môžeme priradiť nekonečne veľa integrálnych súčtov $S_f(D)$ v závislosti od voľby čísel η_i .

Rovnako, ku každému deleniu $D_n, n \in \mathbb{N}$ získame nekonečne veľa integrálnych súčtov $S_f D_n$.

Číslo $\gamma(D) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m\}$ nazveme normou delenia D .

Teda, ku každej postupnosti delení $\{D_n\}$ prislúcha práve jedna číselná postupnosť $\gamma(D_n)$ - postupnosť noriem delení.

Hovoríme, že postupnosť delení $\{D_n\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ je normálna, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(D_n) = 0$.

Nech $\{D_n\}$ je ľubovoľná normálna postupnosť delená intervalu $\langle a, b \rangle$. Pretože každému deleniu D_n prislúcha nekonečne veľa integračných súčtov (vzhľadom na nekonečne veľa možností voľby bodov η_i), zvolenej postupnosti $\{D_n\}$ prislúcha nekonečne veľa postupností $\{S_f(D_n)\}$ integrálnych súčtov funkcie f .

Takú postupnosť $\{S_f(D_n)\}$ budeme nazývať prípustnou postupnosťou integrálnych súčtov funkcie f na $\langle a, b \rangle$. $\{S_f(D_n)\}$ je číselná postupnosť, môže byť konvergentná alebo divergentná; pre nás budú zaujímavé len tie, ktoré konvergujú a majú rovnakú limitu I .

Definícia: Číslo I nazývame určitým integrálom funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$, ak pre každú prípustnú postupnosť $\{S_f(D_n)\}$ integrálnych súčtov funkcie f na $\langle a, b \rangle$ platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) = I.$$

Určitý integrál funkcie funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$ označujeme symbolom

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) -$$

∫ suma - súčet integrál. súčtov

$f(x)$ – integrovaná funkcia = integrand

a - dolná hranica integrálu

b - horná hranica integrálu

Určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$, ak existuje, je spoločná limita všetkých prípustných postupností $\{S_f(D_n)\}$ integrálnych súčtov funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 1: (Postačujúca podmienka integrovateľnosti).

Každá spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$ je na ňom integrovateľná.

Spojitosť funkcie na $\langle a, b \rangle$ stačí k integrovateľnosti. (Avšak existujú funkcie, ktoré nie sú spojité a sú integrovateľné, teda spojitost' je postačujúcou podmienkou, ale nie nutnou).

Platí veta:

Veta 2: Ak funkcia f je ohraničená na $\langle a, b \rangle$ a má na ňom konečný počet bodov nespojitosti, tak je na tomto intervale integrovateľná.

Integrovateľnosť funkcie f je zaručená rozdelením $\langle a, b \rangle$ na čiastkové intervaly, na ktorých je f spojitá a potom využijeme Vetu 1.

Ak $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ má iba konečný počet bodov nespojitosti a v každom bode intervalu

$\langle a, b \rangle$ existuje limita sprava i zľava funkcie $f(x)$, tak funkcie $f(x)$ nazývame po čiastkach spojitou na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 3: (Postačujúca podmienka). Každá funkcia $f(x)$ po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ je na ňom integrovateľná.

2. Základné vlastnosti určitého integrálu

Veta 4: Ak sú funkcie $f(x)$ a $g(x)$ integrovateľné na $\langle a, b \rangle$, je i funkcia $f(x) + g(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Dôkaz: Predpokladajme, že funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú integrovateľné na $\langle a, b \rangle$. Pre ľubovoľné delenie $D = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ a pre ľubovoľnú voľbu čísel $\eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ platí:

$$S_{f+g}(D) = \sum_{i=1}^m [f(\eta_i) + g(\eta_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(\eta_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^m g(\eta_i) \Delta x_i = S_f(D) + S_g(D).$$

Ak $[D_n]$ je ľubovoľná normálna postupnosť delená intervalom $\langle a, b \rangle$, tak podľa definície určitého integrálu platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) = \int_a^b f(x) dx \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_g(D_n) = \int_a^b g(x) dx$$

Preto existuje aj limita $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{f+g}(D_n)$ a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{f+g}(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_f(D_n) + S_g(D_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_g(D_n)$$

to však znamená,

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

že funkcia $f(x) + g(x)$ je integrovateľná a platí:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Veta 5: Ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$, je aj funkcia $c \cdot f(x)$ (c je ľubovoľná konštanta) integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a platí:
$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Z predchádzajúcich dvoch viet priamo vyplýva veta:

Veta 6: Ak sú funkcie $f_1(x)$ a $f_2(x)$ integrovateľné na $\langle a, b \rangle$, je i funkcia $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

Dôsledok: Ak sú funkcie $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$ integrovateľné na $\langle a, b \rangle$, je i funkcia $\sum_{i=1}^k c_i f_i(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\int_a^b [c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + c_k \int_a^b f_k(x) dx.$$

Veta 7: Ak $a < b < c$ a funkcia $f(x)$ je integrovateľná na $\langle a, c \rangle$, tak

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Veta 8: Ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a $f(x) \geq 0$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$, tak je $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Dôkaz: Ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$, tak pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ a pre každú voľbu bodov $\eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) = \int_a^b f(x) dx$$

Avšak $S_f(D) = \sum_{i=1}^m f(\eta_i) \Delta x_i$ pri delení $D = \{x_0, \dots, x_m\}$ a $f(\eta_i) \geq 0$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$

preto $S_f(D_n) \geq 0$ pre všetky n a preto $\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \dots$

Veta 9: Nech sú $f(x)$ a $g(x)$ integrovateľné na $\langle a, b \rangle$ a nech $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$.

Potom platí:
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Dôkaz: Ak f, g sú integrovateľné na $\langle a, b \rangle$, potom podľa Vety 6 je $g - f$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$,

$$g(x) - f(x) \geq 0 \quad \text{pre všetky } x \in \langle a, b \rangle, \text{ teda } \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0.$$

Veta 6:
$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

t. j.
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

V závere vlastnosti určitého integrálu uvedieme dve vlastnosti:

Ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$, položíme

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Newtonova – Leibnizova formula

Newtonov – Leibnizov vzorec dáva najúčinnější spôsob na vypočítanie určitého integrálu.

Veta 10: (Newtonov – Leibnizov vzorec).

Nech je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$. Nech je funkcia $F(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a nech je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$.

Potom platí:
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Dôkaz: Predpokladajme, že $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$, t. j. $f(x) = F'(x)$ pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$.

Nech $\{D_n\}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b \rangle$ a nech $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Je zrejmé, že v každom čiastkovom intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ delenia D_n funkcia $F(x)$ spĺňa

predpoklady Lagrangeovej vety o prírastku funkcie. Existujú teda čísla $\eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ také, že $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$

Uvažujme integrálny súčet

$$S_f(D_n) = \sum_{i=1}^n f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = -F(x_0) + F(x_n) = F(b) - F(a)$$

Teda, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) = F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Príklad:

$$\int_{\ell}^{\ell^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ell}^{\ell^2} \frac{1}{x} dx = [\ln |\ln x|]_{\ell}^{\ell^2} = \ln |\ln \ell^2| - \ln |\ln \ell| = \ln 2 - \ln 1 - \ln 2 \dots$$

Príklad:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Príklad:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx = - [\ln |1 + \cos^2 x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2;$$

Lagrangeova veta o prírastku funkcie:

Nech má funkcia tieto vlastnosti:

1. je spojitá na $\langle a, b \rangle$
2. v každom bode $\langle a, b \rangle$ má deriváciu

Potom existuje aspoň jeden bod $\eta \in (a, b)$ taký, že $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\eta)$.

Stredná hodnota funkcie na intervale

Nech je $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$. $f(x)$ je potom ohraničená na $\langle a, b \rangle$. Nech m je infimum a M suprénum množiny jej hodnôt na $\langle a, b \rangle$

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), \quad M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

Pre $\dots x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $m \leq f(x) \leq M$.

Podľa Vety 9: je

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$
$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$$
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad | : (b-a)$$
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Znamená to, že $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ je číslo medzi m a M .

Označme ho $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Platí veta: Veta 11: (Veta o strednej hodnote): Ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a m je infimum a M suprénum jej hodnôt pre $x \in \langle a, b \rangle$, tak platí $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, kde μ je číslo medzi m a M , t. j. $m \leq \mu \leq M$.

Veta o strednej hodnote má jednoduchú geometrickú interpretáciu.

$$P = \int_a^b f(x) dx \quad - \text{ obsah kriv. lichobežn.}$$

existuje také $\chi \in \langle a, b \rangle$, že

$$P = f(\chi)(b-a) \quad - \text{ obsah } \dots\dots$$

stačí položit $f(x) = \mu$ a dostávame

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a) \quad a \Rightarrow \text{tvrdenie vety}$$

Poznámka: Tak ako môžeme uvažovať priemernú dennú teplotu, priemernú spotrebu materiálu.....môžeme uvažovať priemernú (strednú) hodnotu funkcie f na $\langle a, b \rangle$.

Ak funkcia $f(x)$ je integrovateľná na $\langle a, b \rangle$, tak jej stredná (priemerná) hodnota na tomto intervale je $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

5. Integrál ako funkcia hornej hranice

Veta 12: Nech funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ integrovateľná. Nech $a \leq c < d \leq b$. Potom je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle c, d \rangle$.

Nech je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$. Nech je ľubovoľný bod $z \in \langle a, b \rangle$. Podľa predchádzajúcej vety je funkcia $f(x)$ integrovateľná aj na každom intervale, ktorý je časťou intervalu $\langle a, b \rangle$. Ak $c \in \langle a, b \rangle$, potom môžeme na $\langle a, b \rangle$ definovať funkciu $F(x)$

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Funkcia $F(x)$ je definovaná pre každé $x \in \langle a, b \rangle$. Ak by $x < c$,

potom

$$F(x) = \int_x^c f(t) dt = - \int_c^x f(t) dt.$$

Veta 13: Ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$, je funkcia $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ na $\langle a, b \rangle$ spojitá.

Príklad:

Funkcie $F(x) = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$, môžeme definovať vzorcom (vzťahom)

$$F(x) = \arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

pretože
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin t]_0^x = \arcsin x.$$

6. Metóda per partes pre určité integrály

Ak počítame určitý integrál funkcie $f(x)$ podľa Newtonovho – Leibnizovho vzorca, potrebujeme vypočítať primitívnu funkciu a potom $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Nájst' primitívnu funkciu môžeme často metódou per partes.

Veta 14: Nech majú funkcie μ, v na intervale $\langle a, b \rangle$ spojité derivácie μ', v' . Potom platí:

$$\int_a^b \mu(x) \cdot v'(x) dx = [\mu(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b \mu'(x) \cdot v(x) dx$$

Dôkaz: Z existencie derivácie vyplýva spojitosť funkcií μ, v na $\langle a, b \rangle$. Teda, existujú integrály

$$\int_a^b \mu(x) \cdot v'(x) dx; \quad \int_a^b \mu'(x) \cdot v(x) dx$$

Z vlastnosti súčtu integrálov (Veta 4:) vieme, že platí:

$$\int_a^b \mu(x) \cdot v'(x) dx + \int_a^b \mu'(x) \cdot v(x) dx = \int_a^b [\mu(x) \cdot v'(x) + \mu'(x) \cdot v(x)] dx.$$

Z definícii derivácie súčinu vieme, že:

$$[\mu(x) \cdot v(x)]' = \mu'(x) \cdot v(x) + \mu(x) \cdot v'(x), \quad \text{a teda,}$$

$$\int_a^b [\mu(x) \cdot v'(x) + \mu'(x) \cdot v(x)] dx = \int_a^b [\mu(x) \cdot v(x)]' dx = [\mu(x) \cdot v(x)]_a^b$$

$$\int_a^b \mu(x) \cdot v'(x) dx + \int_a^b \mu'(x) \cdot v(x) dx = [\mu(x) \cdot v(x)]_a^b$$

Z toho dostaneme tvrdenie vety.

Príklad:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \mu = x \quad \mu' = 1 \\ \nu' = \cos x \quad \nu = \sin x \end{array} \right| [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1;$$

Príklad:

$$\int_1^{\ell} x \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \mu = \ln x \quad \mu' = \frac{1}{x} \\ \nu' = x \quad \nu = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_1^{\ell} - \frac{1}{2} \int_1^{\ell} x dx = \frac{\ell^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{\ell} =$$

$$= \frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\ell^2 + 1),$$

Substitučná metóda pre určité integrály

Veta 15: Nech je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech funkcia $x\Psi(t)$ má tieto vlastnosti:

1. na $\langle \alpha, \beta \rangle$ má spojitú deriváciu $\Psi(t)$
1. $\Psi(\alpha) = a, \Psi(\beta) = b$
2. pre $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ je $\Psi(t) \in \langle a, b \rangle$.

Potom platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\Psi(t)) \Psi'(t) dt.$$

Príklad:

$$\int_1^{\ell} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2}} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = \ell \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^1 = \arcsin 1 =$$

Príklad:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \sin t dt = \left. \begin{array}{l} \cos t = z \\ \sin t dt = dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0 \end{array} \right| = -\int_1^0 z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dt = \left. \begin{array}{l} 1 - x^2 = t^2 \\ -2x dx = 2t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = -\int_1^0 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3};$$

Plošný obsah rovinných útvarov

Z elementárnej geometrie vieme počítať plošný obsah niektorých útvarov (obdĺžniky, trojuholníky, mnohoholníky a zložené útvary, ktoré sa dajú „poskladať“ z Δ a \square).

Ukážeme teraz, ako možno plošný obsah počítať pomocou integrálu.

A: V PRAVOUHLÝCH SÚRADNICIACH

Nech sú funkcie $f(x)$ a $g(x)$ na $\langle a, b \rangle$ spojité a nech $g(x) < f(x)$ pre $x \in \langle a, b \rangle$.

Množinu bodov $\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{array} \right\}$ nazývame

elemntárnou oblasťou určenou funkciami $f(x)$, $g(x)$ a intervalom $\langle a, b \rangle$.

$$L = \{[x, y]: a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

plošný obsah elementárnej oblasti L vypočítame podľa vzťahu

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Príklad:

Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného funkciami: $x \cdot y = 4$, $x + y = 5$

$$L \equiv \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{4}{x} \leq y \leq 5 - x \end{cases}$$

$$P = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x \right]_1^4 = 20 - 8 - 4 \ln 4 - 5 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} - 4 \ln 4$$

Príklad:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - x - 6 & x^2 - x - 6 &= -x^2 + 5x + 14 \\ y &= -x^2 + 5x + 14 & 2x^2 - 6x - 20 &= 0 \\ & & x^2 - 3x - 10 &= 5 \\ & & (x - 5)(x + 2) &= 0 \\ & & x &= 5, \quad x = -2 \end{aligned}$$

$$P = \int_{-2}^5 (-2x^2 + 6x + 20) dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 20x \right]_{-2}^5 =$$

$$y = x - 1 \quad L_1 \equiv \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq 0 \\ -2x \leq y \leq x + 1 \end{cases}$$

Príklad:

$$\begin{aligned} y - x &= 1 \\ y &= -2x \\ y &= x \\ y + x &= 3 \end{aligned}$$

$$L_2 \equiv \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq x + 1 \end{cases}$$

$$L_3 \equiv \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq y \leq 3 - x \end{cases}$$

$$P = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} = \dots$$

B: V PARAMETRICKÝCH SÚRADNICIACH

Uvažujme elementárnu oblasť, ktorá je na $\langle a, b \rangle$ ohraničená funkciou $f(x)$.

$$O = \{[x, y]: a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Nech funkcia $f(x)$ je daná parametrickými rovnicami

$$x = \Psi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

Nech $\Psi(t)$, $\psi(t)$ sú spojité na $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\Psi(t)$ je rýdzomonotónna funkcia a má spojité deriváciu $\Psi'(t)$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\Psi(\alpha) = a$, $\Psi(\beta) = b$.

Nech $\psi(t) \geq 0$ (je nezáporná) v $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Keďže $\Psi(t) = x$ je rýdzomonotónna na $\langle \alpha, \beta \rangle$, existuje k nej inverzná funkcia $t = \Psi^{-1}(x)$ a platí: $y = \psi(t) = \psi(\Psi^{-1}(x)) = f(x)$

Potom pre obsah oblasti O máme:

$$P = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \psi(\Psi^{-1}(x)) dx$$

stačí položiť subst. $x = \Psi(t)$, potom $dx = \Psi'(t) dt$ a dostáv.

$$P = \int_a^b \psi(\Psi^{-1}(x)) dx = \left| \begin{array}{l} x = \Psi(t) \\ dx = \Psi'(t) dt \\ a = \Psi(\alpha), \quad b = \Psi(\beta) \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(\Psi^{-1}(\Psi(t))) \Psi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \Psi'(t) dt$$

Pre obsah oblasti $O = \{[x, y]: a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ platí: $P = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) |\Psi'(t)| dt$

Príklad: Vypočítajte plošný obsah časti roviny ohraničenej krivkou danou v parametrickom tvare:

$$x = 3t^2$$

$$y = 3t - t^3, \quad t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$$

$$P = \int_0^{\sqrt{3}} (3t - t^3) \cdot 6t \cdot dt = \int_0^{\sqrt{3}} 18t^2 - 6t^4 \cdot dt = \left[6t^3 - 6 \frac{t^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{36}{5} \sqrt{3}$$

Príklad: $x = a \cos t$ $+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin^2 t \cdot a dt = +ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$

$y = b \sin t$ $= +ab \left[\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = + \frac{ab\pi}{4}$

$$a, b > 0, \quad t \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$dx = |-a \sin t| dt = a \sin t dt$$